S-MI-1

Concours EAMAC 2018	Cycle INGENIEUR	MATHEMATIQUES

Exercice S-MI1.1 (5 points):

Soit (p, q) appartenant à C^2. On note x_1, x_2, x_3 les zéros de X^3+pX+q dans C de sorte que

$X^3+pX+q = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$

On note : $\sigma_1 = x_1+x_2+x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$ et $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

On note, pour tout k appartenant à IN : $S_k = x_1^k+x_2^k+x_3^k$

1) Montrer que $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$ et $\sigma_3 = -q$.
2) a) Calculer S_0, S_1, S_2 en fonction de p et q.
   b) Etablir que, pour tout k appartenant à IN, $S_{k+3} + pS_{k+1}+qS_k = 0$
   c) En déduire S_3 et S_4 en fonction de p et q.
3) Calculer $A = x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_1 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 + x_3^3x_2$ en fonction de p et q.

Exercice S-MI1.2 (5 points):

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ appartenant à M_2 (IR),

ϕ : M_2 (IR) → M_2 (IR), définie par ϕ (M) = AMB.

a. Vérifier que ϕ est linéaire.
b. Montrer que ϕ est bijective et déterminer ϕ^{-1}.
c. Montrer que *B* = (I_2, A, B, AB) est une base de M_2 (IR), déterminer les matrices de ϕ et ϕ^{-1} dans *B.*

Exercice S-MI1.3 (5 points) :

Soit a un nombre réel et *f* : [a,+∞[→ℝ une application de classe C^1.

1. Montrer que si $\lim_{+\infty} f'(x) = +\infty$, *alors* $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Que peut-on dire de l'hypothèse $\lim_{-\infty} f'(x) = -\infty$?

On suppose à présent que pour tout x ∈ [a,+∞[, *f*(x) est strictement positif.

3. Soit g: [a,+∞[→ℝ une application de classe C^1 telle que :

$$\lim_{+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad et\ que \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad diverge.$$

Montrer que $\lim_{+\infty} \frac{\int_a^{+\infty} g(x)dx}{\int_a^{+\infty} f(x)dx} = 0.$

Exercice S-MI1.4 (5 points) :

Soit α un nombre réel qui n'est pas entier et soit *f* une fonction de 2π -périodique, définie sur ℝ, et telle que

$$f(t) = sin\alpha t \ \ pour - \pi \leq t \leq \pi$$

1. Déterminer la série de Fourier de la fonction *f*. La fonction *f* est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?
2. On considère à présent la fonction *g*, 2π-périodique, définie sur ℝ et telle que
$$g(t) = cos\alpha t \ \ pour - \pi \leq t \leq \pi$$
Déterminer la série de Fourier de la fonction g. La fonction g est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?
3. A partir des séries de Fourier de *f* et de *g*, expliciter la série de Fourier complexe de la fonction *h*, 2π-période, définie sur ℝ, par
$$h(t) = e^{i\alpha t} \ \ pour - \pi \leq t \leq \pi$$
4. En déduire l'égalité : $\frac{\pi^2}{sin^2 \pi\alpha} = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}$.