S-MI2

Concours EAMAC 2016	Cycle INGENIEUR	Epreuve de MATHEMATIQUES

Exercice S-MI2-1: (6 points)

Soit k appartenant à IR et A_k = $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ appartenant à $M_3(\mathrm{IR})$

1. Déterminer les valeurs de k pour les quelles A_k est inversible.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A_k et en déduire que A_k est diagonalisable.
3. Quel est le polynôme minimal de A_k ?
4. Montrer pour tout entier naturel non nul n, on a $A_k^n = a_n A_k + b_n I_3$.

   Calculer a_n et b_n en fonction de n et donner une expression de A_k^n en fonction de n.

Exercice S-MI2-2: (4 *points*)

Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$

1. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}
2. Calculer I_n
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$

<u>EXERCICE S- MI2-3</u> (5 points)

Pour tout entier naturel n, on pose :

I (n) =$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$; J (n) =$\int_0^{\pi} (\sin t)^n dt$; K (n) = $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

J (n) = K (n) = 2I (n)

2. Calculer I (0), I (1) et I (2)

3. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre I (n + 2) et I(n) pour tout n ∈N

4. Montrer que la suite des intégrales $(\mathrm{I}\ (\mathrm{n})\ )_{n\in N}$ est une suite décroissante à termes positifs.

<u>Exercice S-MI2-4 : (5 points)</u>

On définit pour n entier naturel non nul le polynôme à coefficients réels P_n par :

$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \frac{X(X+1)(X+2)}{3!} + \ldots + \frac{X(X+1)(X+2)\ldots(X+n-1)}{n!}$$

1) Déterminer explicitement les polynômes P_1, P_2, P_3.
2) Montrer que P_n est un polynôme de degré n.
3) Soit λ_n le coefficient dominant de P_n. Démontrer que $\lambda_n = \frac{1}{n!}$.
4) Démontrer la formule $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j = 0$

   En déduire que pour tout entier k, tel que $1 \le k \le n$, on a $P_n(-k) = 0$
5) Factoriser P_n