

EAMAC – 2014 - SUJET M-I-5

Exercice 1 (6 points)

Soient A, B deux sous-ensembles de E , f une application définie par

$$f: P(E) \rightarrow P(A) \times P(B)$$

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Démontrer que f est injective ssi $A \cup B = E$
2. Démontrer que f est surjective ssi $A \cap B = \emptyset$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 2 (6 points)

Soit A un anneau commutatif. On appelle radical de l'idéal propre I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A / \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que \sqrt{I} est un idéal
2. Que se passe-t-il si $I = 0$
3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \cap \sqrt{I} = \sqrt{I}$
4. Quel est le radical d'un idéal premier \mathcal{J} ?
5. Déterminer complètement le radical d'un idéal $\mathcal{J} = \sqrt{m}$ de \mathbb{Z} où $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$
6. Déterminer $I+J$, $I \cap J$, $\sqrt{I+J}$ pour :
 - (a) $I = 8\mathbb{Z}, J = 12\mathbb{Z}$ dans \mathbb{Z}
 - (b) $I = (X - 1), J = (X)$ dans $\mathbb{Z}[X]$

Exercice 3 (4 points)

Soit (f_n) une suite de fonctions définie par

1. Etudier la convergence simple de cette suite sur \mathbb{R}
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[\alpha, +\infty[$
3. la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$

Exercice 4 (4 points)

Etudier la série de terme général u_n lorsque :

1. $\frac{1}{n}$

2. $\frac{1}{n^2}$

3. $\frac{1}{n^3}$