EAMAC	**Concours EAMAC 2023**	**Cycle : INGENIEUR**

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5 pts)

Soit Δ_n le déterminant la matrice de taille n suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre Δ_{n+2}, Δ_{n+1} et Δ_n pour tout $n \geq 1$.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 : (5 pts)

Pour $x \in I = [0, 1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n(1 - x)$.

1. Etudier la convergence simple sur I *de* la série de terme général u_n. On notera dans la suite S la somme de la série.
2. Etudier la convergence normale sur I de la série de terme général u_n.
3. On suppose dans cette question que $a=0$. Calculer S sur $[0, 1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. On suppose $a>0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.

Exercice 3 : (5 pts)

Dans R^4 muni de la base canonique, soit f l'endomorphisme de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer A^2 en fonction de A. En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression de A^n en fonction de A. Trouver le polynôme minimal de A.
3. Calculer dim(KerA) et en déduire que A est diagonalisable. Trouver le polynôme caractéristique de A.
4. Trouver une base de vecteurs propres.

Exercice 4 : (5 pts)

Etudier la nature des séries numériques dont les termes généraux sont :

1) $u_n = \frac{3^{\frac{n}{2}}\left((2n+1)!\right)^2}{(n!)\left((3n-1)!\right)}$, n$\in N^*$

2) $v_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}$, n$\in N^*$

3) $w_n = \left(a + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}$,$n \in N^* (a\, réel > 0)$.