EAMAC	**Concours EAMAC 2023**	**Cycle : TECHNICIEN**

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 03 heures

Exercice 1 (5 points)

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence :
(E) : Pour tout n de IN $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que, toute suite géométrique (v_n) de raison q vérifie (E) si et seulement si $q^2 = q + 1$. **(1pt)**
2. Pour tout n, on définit la suite (t_n) par : $t_n = A\alpha^n + B(1-\alpha)^n$, où A ; B sont des réels et $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   a) Vérifier que $1 - \alpha = -\frac{1}{\alpha}$. **(0.5pt)**
   b) Montrer que la suite (t_n) vérifie (E), **(1.pt)**
   c) Déterminer A et B tels que $t_0 = 1$ et $t_1 = 3$. **(1pt)**

3. a) Justifier que $t_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\!\left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}\right]\!\right]$ **(1pt)**
   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \alpha$. **(0.5pt)**

Exercice 2 (5 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2.

U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules noires. U_2 contient 5 boules blanches et une boule noire.

L'expérience (E) consiste à tirer une boule dans chaque urne. Le tirage étant équiprobable, calculer la probabilité de tirer exactement :

1. a) deux boules blanches. **(0.75pt)**
   b) deux boules noires. **(0.75pt)**
   c) une boule blanche et une boule noire. **(0.5pt)**

2. On appelle A l'événement « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

a) Démontrer que la probabilité de A est $\frac{17}{30}$. **(0.5pt)**

b) On répète l'expérience (E) 5 fois de suite en ayant soin de remettre les boules tirées après chaque tirage dans leur urne d'origine.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois l'événement A ? **(1pt)**

c) On répète l'expérience (E) n fois de suite dans les mêmes conditions. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement A ? **(1pt)**

d) Trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$. **(0.5pt)**

Exercice 3 (5 points)

Pour tout n ≥ 1, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1. a) Etudier le sens de variation de (I_n) **(1pt)**

   b) Justifier que (I_n) est convergente. **(0.5pt)**

2. a) Calculer I_1. **(0.5pt)**

   b) Montrer que ∀ $x \in [0 ; 1]$, on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$. **(1pt)**

   c) En déduire que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. **(0.5pt)**

   d) Calculer la limite de (I_n). **(0.5pt)**

3. Utiliser une intégration par parties pour montrer que ∀ $n \geq 1$, on a :

   I_{n+1}= (n +1)I_n - 1. **(1pt)**

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x^2 lnx & si\ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

et (C) sa courbe dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1. Etudier la dérivabilité de g sur [0 ; + ∞[. **(0.5pt)**

2. Etudier les variations de g. **(1.5pt)**

3. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle [1 ; +∞[admet une fonction réciproque h^{-1}dont on précisera l'ensemble de définition. **(1pt)**

b) Sur quel ensemble h^{-1} est – elle dérivable ? **(0.5pt)**

c) Résoudre dans ℝ l'équation $h^{-1}(x)$ = e. **(0.5pt)**

d) Construire la courbe de g et celle de h^{-1} (on représentera les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et la demi-tangente au point d'abscisse 0. **(1pt)**