EAMAC	**Concours EAMAC 2023**	**Cycle : EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE**

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5 pts)

En utilisant les développements limités, calculer la limite de h(x) quand x tend vers 0+ avec :

$$h(x)=\frac{xe^x}{e^x-1} - ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right).$$

Exercice 2 : (5 pts)

Soient a et b deux réels distincts non nuls, calculer le déterminant d'ordre 4 suivant :

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(On donnera une forme simplifiée)

Exercice 3 : (5 pts)

Soit m ∈ R et A_m ∈ M_3(R) la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A_m et en déduire que A_m est diagonalisable.
2. Quel est le polynôme minimal de A_m ?
3. Montrer pour tout n ∈ R*, on a $A_m^n = a_n A_m + b_n I_3$.
4. Calculer a_n et b_n en fonction de n et donner une expression de A_m^n en fonction de n.

Exercice 4 : (5 pts)

On pose F(x)= $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$dt

1. Montrer que F est définie et continue sur [0, +∞[et déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$
2. Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[et déterminer sa dérivée.
3. En intégrant F' sur]0, +∞[, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$