CONCOURS D'ENTREE AU CYCLE D'INGENIEUR DE L'ECOLE AFRICAINE DE LA METEOROLOGIE ET DE L'AVIATION CIVILE (EAMAC)
SESSION 2013

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
DUREE : 4 HEURES

Exercice 1 $(5pts)$

1. Montrer que si $f \in \mathbf{R}[a,b]$, alors $\exists \theta \in]a,b[$ tel que: $\int_a^\theta f(t)dt = \int_\theta^b f(t)dt.$

2. Soit $f \in C[a,b]$, $a > 0$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer qu'il existe $\theta \in]a,b[$ tel que:

$$\int_a^\theta f(x)dx = \theta f(\theta).$$

Exercice 2 $(4pts)$

Déterminer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)} x^{n+1}$.

Exercice 3 $(5pts)$

Déterminer l'extremum de la fonction f définie par: $f(x,y,z) = 2x^3yz - x^2 - y^2 - z^2$.

Exercice 4 $(6pts)$

1) Exprimer $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ et $\dfrac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}$ en fonction de $\cos\alpha$.

2) Dans $\mathbf{M}_n(\mathrm{R})$, on considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & & \\ b & a & b & & O \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & & b & a & b \\ & & & b & a \end{pmatrix}$$

4) et on désigne par $P_n(\lambda)$ son polynôme caractéristique. Déterminer une relation de récurrence liant P_n, P_{n-1}, P_{n-2} (pour $n \geq 4$)

2/ 5) On pose $\lambda = a + 2b\cos\alpha$. Calculer directement $P_2(\lambda)$ et $P_3(\lambda)$ en fonction de α . En déduire $P_n(\lambda)$ en fonction de α .

4 6) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A .
Montrer que le vecteur propre V_k associé à λ_k a pour composantes $(\sin\omega, \sin 2\omega, \ldots, \sin n\omega)$ en précisant la valeur de ω .