CONCOURS D'ENTRÉE A L'EAMAC

SESSION DE MAI 2013
EPREUVE DE MATHEMATIQUES POUR LE CYCLE INGENIEUR
DUREE: 4 HEURES

<u>EXERCICE 1</u>: (6 points)

On jette 3 fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b, c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants:
A: $Q(x)$ admet une racine réelle. **(2 points)**
B: $Q(x)$ admet deux racines réelles distinctes. **(2 points)**
C: $Q(x)$ admet aucune racine réelle. **(2 points)**

<u>EXERCICE 2</u>: (5 points)

Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx$$

converge si et seulement si $0 < \alpha < 2$.

<u>EXERCICE 3</u>: (5 points)

1°) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1} dt = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ **(1 point).**

2°) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par:

$$f_n(t) = \begin{cases} (1 - \frac{t^2}{n})^n \ \ si\ t \in [0, \sqrt{n}] \\ \\ 0\ si\ t \in]\sqrt{n}, +\infty[\end{cases}$$

Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, +\infty[$ **(1 point)**

3°) Montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \right) . = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$ **(1 point)**

4°) Montrer que :

$$\int_{0}^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n} dt = \sqrt{n}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n+1}dt$$ **(1 point)**

5°) En déduire que :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On admettra que : $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^{n}\sqrt{2\pi n}.$ **(1 point)**

<u>EXERCICE 4</u>: (4 points)

On pose $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{xe^{-nx}}{Log n}$.

1°) Montrer que la fonction *f* est définie sur [0, +∞[**(1 point)**

2°) Etudier la continuité de *f* sur [0, +∞[**(1 point)**

3°) Montrer que la fonction *f* est dérivable sur]0, +∞[**(1 point)**

4°) Montrer que *f* n'est pas dérivable en 0. **(1 point)**