CONCOURS D'ENTREE EAMAC - SESSION 2013

CYCLE CCA
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercise 1 *Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ \dfrac{Arc\tan(t)}{t} & si\ \ t \neq 0 \end{cases}.$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et est paire.*
2. *Donner le développement limité à lordre 1 de $f(t)$ au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$.*
3. *Justifer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^*$.*
4. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\displaystyle\int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)}dw = -\frac{1}{2}t^2 f'(t)$.*
5. *En déduire le sens de variation de f.*

Exercise 2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :*

1. *a. f est constante ;*

   b. f n'est pas constante ;

   c. f s'annule ;

   d. f est périodique.

Exercise 3 *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que : $\forall x \in A, x^2 = x$.*

1. *Montrer que $\forall x \in A, x + x = 0$.*
2. *Montrer que A est commutatif.*
3. *Montrer que $\forall x, y \in A, xy(x + y) = 0$.*

Exercise 4 *Soit A la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A.