Concours EAMAC 2021	Cycle : TECHNICIEN	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

Durée : 03 heures

Exercice 1 (5 pts)

On appelle f la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par $f(x) = 1 + (x-2)lnx$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique $2\ cm$.

1. f' désigne la fonction dérivée première de f .
   a) Etudier le sens de variation de f' .
   b) Déterminer les limites de f' en 0 et en $+\infty$.
2. a) Montrer que sur IR_+^* l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[1{,}4;\ 1{,}5]$.

   b) En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Etudier le sens de variation de f puis donner son tableau de variation.
4. a) Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes à C au point d'abscisse x_0 passe par le point de coordonnées $(2; 0)$.

   b) Tracer C ainsi que les tangentes à C en x_0 .

Exercice 2 (5 points)

On lance simultanément deux dés bien équilibrés, un blanc et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les évènements suivants :

B : « le numéro sorti sur le dé blanc est pair »

V : « le numéro sorti sur le dé vert est pair »

S : « la somme des numéros sortis sur les deux dés est paire ».

1. Calculer la probabilité des évènements B, V et S.
2. Les évènements S et V sont-ils indépendants ?
3. Les évènements S et B sont-ils indépendants ?
4. Les évènements S et V∩B sont-ils indépendants ?

Exercice 3 (5 pts)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
   $4z^2 - 4z + 5 = 0.$
2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $5\ cm$, les points $A, B, C\ et\ D$ d'affixes respectives $a, b, c\ et\ d$ définies par
   $a = \frac{1}{2}\ ;\ b = \frac{1}{2} - i\ ;\ \ c = \frac{1}{2} + i\ \ et\ \ d = \frac{1}{2}(1 + i).$
   a) Donner le module et un argument de d.
   b) Mettre sous forme algébrique $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\ \ et\ \ \frac{1}{d}.$
   c) Placer dans le plan complexe les points $A,\ B,\ C,\ D$ et les points $B',\ C'\ et\ D'$ d'affixes respectives $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\ \ et\ \ \frac{1}{d}.$
3. a) Quel est l'ensemble E des points M d'affixe $z = \frac{1}{2} + iy$ lorsque y décrit IR.
   b) Calculer le module des nombres complexes $\frac{1}{b} - 1;\ \frac{1}{c} - 1\ \ et\ \ \frac{1}{d} - 1.$
   c) Calculer en fonction de y, la partie réelle X et la partie imaginaire Y du nombre complexe $Z = \frac{1}{z}$ avec z défini au point 3. a).
   d) En déduire l'ensemble F des points N d'affixe Z lorsque y décrit IR.

Construire $E\ \ et\ \ F$ sur le graphique précédent.

Exercice 4 (5points)

Soit $(u_n)_{n \in N}$ la suite numérique définie par :

$u_0 = 15$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

1) Montrer que cette suite est minorée par 4.

2) Préciser le sens de variation de (u_n)

3) Montrer que cette suite converge, puis déterminer sa limite.