S-MT-1

Concours EAMAC 2019	Cycle TECHNICIEN/ TECHNICIEN SUPERIEUR	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

Durée : 03h

S-MT1.1 : (5points)

A_0 et A_1 sont les points d'abscisses respectives $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ d'un axe. A_2 est le milieu du segment $[A_0A_1]$ et x_2 est son abscisse ; A_3 est le milieu du segment $[A_2A_1]$ et x_3 est son abscisse ;….et le processus se poursuit indéfiniment.

1°/ Quelle est l'abscisse x_n de A_n en fonction des abscisses de A_{n-1} *et* A_{n-2} ? (**0,5pt**)

2°/ On se propose de savoir, lorsque n est de plus en plus grand, si les points A_n s'accumulent autour d'un point unique et d'un seul. Pour cela posons pour

$n \geq 1, y_n = x_n - x_{n-1}$

a) Montrer que (y_n) est une suite géométrique. (**0,5pt**)

b) Montrer que $S_n = y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots + y_n = x_n$ (**0,5pt**)

c) Déterminer d'autre part S_n en utilisant le fait que (y_n) soit une suite géométrique. (**1,5pt**)

d) Déduire x_n explicitement en fonction de n. (**1pt**)

e) Quelle est la limite de la suite (x_n)? Quelle conclusion faites-vous ? (**1pt**)

S-MT1.2 : (5points)

1. Etude d'une équation de second degré.
   - **a)** Discuter suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation : (E) $x^2 + 2x - 2m = 0$. **(0,5pt)**
   - **b)** Montrer que si $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ alors $-2 < x' < x'' < 0$ où x' et x'' sont les solutions de (E) telles que $x' < x''$ **(0,5pt)**
   - **c)** Montrer que si $m > 0$ alors $x' < -2 < 0 < x''$ **(0,5pt)**
   - **d)** Etudier le signe de $x^2 + 2x - 2m$ suivant les valeurs du réel m **(0,5pt)**
2. Etude de la fonction $f_m : x \mapsto x + m\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|$
   - **a)** Déterminer D le domaine de définition de f_m **(0,5pt)**
   - **b)** Calculer les limites de $f_m(x)$ aux bornes de D suivant les valeurs de m. **(0,5pt)**
   - **c)** Justifier que $f'_m(x) = \frac{x^2 + 2x - 2m}{x(x+2)}$ étudier le sens de variation de f_m dans les cas suivants : (i) $m < -\frac{1}{2}$ (ii) $m = -\frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ (iv) $m > 0$. **(1pt)**

d) Tracer les courbes représentatives des fonctions $f_{-\frac{1}{4}}$ et f_2. **(1pt)**

S-MT1.3 : (5points)

Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_1^e x(lnx)^n \mathrm{dx}$ et $I_0 = \int_1^e x\mathrm{dx}$

1. Calculer I_0 et I_1 **(0,5ptt)**
2. **a**) Montrer que pour tout entier n, $I_{n+1} = \frac{e^2-(n+1)I_n}{2}$ (1) **(1ptt)**
   b) En déduire I_2**(0,5ptt)**
3. **a)** Justifier que pour tout n, $I_{n+1} \leq I_n$**(1ptt)**
   b) En déduire en utilisant la relation (1) l'encadrement : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$**(1ptt)**
   c) Calculer les limites de I_n et nI_n lorsque n tend vers $+\infty$. **(1ptt)**

S-MT1.4 : (5points)

Un fermier possède dans sa ferme des chevaux, des vaches, des moutons et des chèvres. On désigne par *x, y, z, t* respectivement le nombre de chevaux, vaches, moutons et chèvres.

On suppose que les nombres *x, y, z, t* sont dans cet ordre, les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

1°/ Sachant qu'il y a 5 chevaux et que le nombre total des animaux de la ferme est 56, déterminer les nombres *x, y, z, t.* (**1,5pt**)

2°/ Un voleur s'infiltre dans la ferme et emporte 3 des animaux. Sachant que le prix de vente des animaux est 250 000F pour un cheval, 200 000F pour une vache, 75 000F pour un mouton et 37 500F pour une chèvre, déterminer :

a) La perte minimale du fermier et la probabilité de cette perte. (**1,5pt**)

b) La perte maximale du fermier et la probabilité de cette perte. (**1pt**)

c) La probabilité que le fermier perde 150 000F. (**1pt**)