S-MI-1

Concours EAMAC 2019	Cycle INGENIEUR	EPREUVE DE : MATHEMATIQUES

Durée : 04h

S-MI-1.1 (5 points) :

Soit $\star$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par $x \star y = x+y - xy$.

1. Montrer que la loi $\star$ est commutative et associative.

2. Montrer que la loi $\star$ admet un élément neutre e que l'on précisera.

3. Montrer que tout élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet pour inverse $x/(x-1)$.

4. L'ensemble $(\mathbb{R}, \star, e)$ est-il un groupe ?

5. L'ensemble $(\mathbb{R}\setminus\{1\}, \star, e)$ est-il un groupe ?

S-MI-1.2 (5 pts) :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z)=(x, -3y+4z, -2y+3z)$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille $(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. En déduire que f est bijective.

4. Calculer $f \circ f$.

5. En déduire l'expression de f^{-1}.

S-MI-1.3 (5 pts)

Etudier la convergence et calculer la somme des séries dont les termes généraux sont définis par :

1) $u_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ $(n \geq 1)$

2) $v_n = \frac{n+4}{n(n^2-4)}$ $(n \geq 3)$

3) $w_n = \frac{n^3}{n!}$ (n ≥1)

<u>S-MI-1.4</u> (*5 pts*)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-k & -1 \\ 2-k & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

où k est un réel.

1) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la matrice A est diagonalisable.

2) Pour k=2, calculer l'exponentielle de la matrice A et A^n où n ≥1 est un entier naturel.